

Um modelo analítico para projeto de sapata de canto combinadas

A. Luévanos Rojas^{1*}, S. López Chavarría¹, M. Medina Elizondo¹,
R. Sandoval Rivas¹, O. M. Farías Montemayor¹

* Autor de Contato: arnulfol_2007@hotmail.com

DOI: <https://doi.org/10.21041/ra.v10i3.432>

Recepção: 24/08/2019 | Aceitação: 06/04/2020 | Publicação: 01/09/2020

RESUMO

Este trabalho apresenta um modelo analítico para o dimensionamento de sapatas angulares combinadas submetidas a uma carga axial e dois momentos fletores ortogonais para cada pilar que leva em consideração a pressão real do solo sob a sapata, e a metodologia é baseada no princípio de que a integração da força cortante é o momento. O projeto atual considera a pressão máxima em todos os pontos de contato. Este modelo é verificado pelo equilíbrio das forças de cisalhamento e momentos. A aplicação do modelo é apresentada por meio de um exemplo numérico. Portanto, o modelo proposto é o mais adequado, pois gera um melhor controle de qualidade dos recursos utilizados.

Palavras-chave: sapatas combinadas de canto; modelo analítico para projeto; momentos de flexão; cisalhamento por flexão; cisalhamento por punção.

Citar como: Luévanos Rojas, A., López Chavarría, S., Medina Elizondo, M., Sandoval Rivas, R., Farías Montemayor, O. M. (2020), “Um modelo analítico para projeto de sapata de canto combinadas”, Revista ALCONPAT, 10 (3), pp. 317 – 335, DOI: <https://doi.org/10.21041/ra.v10i3.432>

¹ Instituto de Investigaciones Multidisciplinarias, Universidad Autónoma de Coahuila, Torreón, Coahuila, México.

Editor associado responsável por este artigo: Paulo Helene

Contribuição de cada autor

Neste trabalho, o autor Dr. Arnulfo Luévanos Rojas contribuiu com a ideia original do artigo, desenvolvimento matemático do novo modelo e coordenou o trabalho em geral. A autora Dra. Sandra López Chavarría contribuiu para a discussão dos resultados. O autor Dr. Manuel Medina Elizondo contribuiu para a redação da obra. O autor C. a Dr. Ricardo Sandoval Rivas contribuiu para a elaboração das figuras. O autor C. a Dr. Oscar Mario Farías Montemayor contribuiu na aplicação do modelo proposto.

Licença Creative Commons

Copyright (2020) é propriedade dos autores. Este trabalho é um artigo de acesso aberto publicado sob os termos e condições de uma Licença Internacional Creative Commons Atribuição 4.0 ([CC BY 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)).

Discussões e correções pós-publicação

Qualquer discussão, incluindo a resposta dos autores, será publicada no segundo número do ano 2021, desde que a informação seja recebida antes do fechamento do primeiro número do ano de 2021.

An analytical model for the design of corner combined footings.

ABSTRACT

This work shows an analytical model for the design of corner combined footings subjected to an axial load and two orthogonal flexural moments per each column. It considers the real pressure on the ground below of the footing, and the methodology is based on the principle that the integration of the shear force is the moment. The current design considers the maximum pressure at all contact points. This model is verified by equilibrium of shear forces and moments. The application of the model is presented by means of a numerical example. Therefore, the proposed model is the most appropriated, because it generates better quality control in the resources used.

Keywords: corner combined footings; analytical model for design; flexural moments; flexural shearing; punching shearing.

Un modelo analítico para el diseño de zapatas combinadas de esquina

RESUMEN

Este trabajo muestra un modelo analítico para el diseño de zapatas combinadas de esquina sometidas a una carga axial y dos momentos flexionantes ortogonales por cada columna. El modelo toma en cuenta la presión real del suelo debajo de la zapata, y la metodología se basa en el principio de que la integración de la fuerza de corte es el momento. El diseño actual considera la presión máxima en todos los puntos de contacto. Este modelo se verifica por equilibrio de fuerzas de corte y momentos. La aplicación del modelo se presenta por medio de un ejemplo numérico. Por lo tanto, el modelo propuesto es el más apropiado, ya que genera un mejor control de calidad en los recursos utilizados.

Palabras clave: zapatas combinadas de esquina; modelo analítico para diseño; momentos flexionantes; cortante por flexión; cortante por penetración.

Informações legais

Revista ALCONPAT é uma publicação trimestral da Associação Latino-Americana de Controle de Qualidade, Patologia e Recuperação de Construção, Internacional, A.C., Km. 6, antiga estrada para Progreso, Merida, Yucatán, C.P. 97310, Tel.5219997385893, alconpat.int@gmail.com, Website: www.alconpat.org

Reserva de direitos para o uso exclusivo do título da revista No.04-2013-011717330300-203, eISSN 2007-6835, ambos concedidos pelo Instituto Nacional de Direitos Autorais. Editor responsável: Dr. Pedro Castro Borges. Responsável pela última atualização deste número, Unidade de Informática ALCONPAT, Eng. Elizabeth Sabido Maldonado.

As opiniões expressas pelos autores não refletem necessariamente a posição do editor.

A reprodução total ou parcial do conteúdo e das imagens da publicação é realizada de acordo com o código COPE e a licença CC BY 4.0 da Revista ALCONPAT.

1. INTRODUÇÃO

Uma fundação ou mais comumente chamada de base que é o elemento de uma estrutura arquitetônica que a conecta ao solo e que transfere as cargas da estrutura para o solo. As fundações são divididas em dois tipos, rasas e profundas (Bowles, 2001; Das et al., 2006).

As fundações rasas para pilares são de cinco tipos principais: 1) sapatas corridas; 2) sapatas isoladas; 3) sapatas combinadas suportando dois ou mais pilares; 4) sapatas de cintamento ou de balanço; 5) lajes de fundação ou radier que cobrem toda a área de fundação (Bowles, 2001).

Uma sapata combinada é necessária para apoiar um pilar que está localizada muito perto do limite da propriedade, de modo a não invadir a propriedade adjacente. A base combinada pode ser uma laje de espessura uniforme ou uma viga em T invertida. Se o tipo de laje da sapata combinada for usado para apoiar dois ou mais pilares (geralmente dois), a laje deve ter uma forma retangular, trapezoidal ou em forma de T quando um pilar está mais carregado do que o outro (Kurian, 2005; Punmia et al., 2007; Varghese, 2009).

A pressão do solo sob uma sapata depende do tipo de solo, da rigidez relativa do solo e da sapata e da profundidade da fundação ao nível de contato entre a sapata e o solo.

A Figura 1 mostra a distribuição da pressão do solo sob a sapata de acordo com o tipo de solo e a rigidez da sapata (Bowles, 2001).

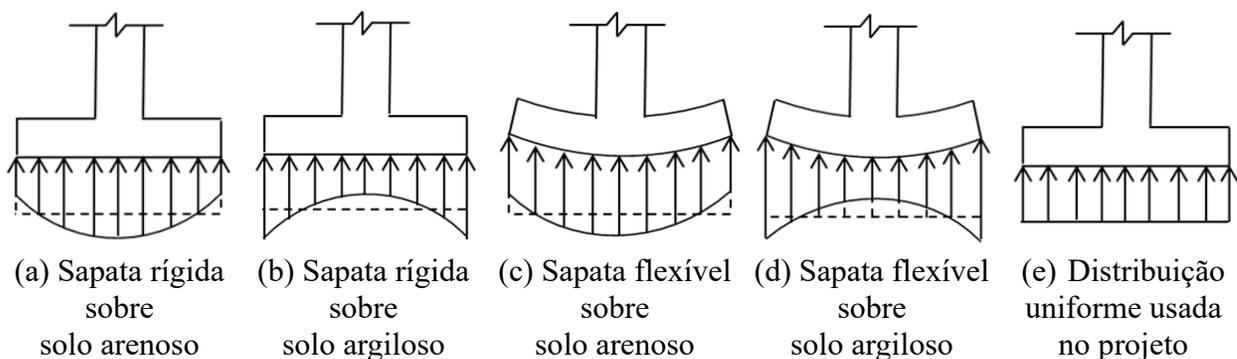


Figura 1. Pressão abaixo da sapata

Estudos sobre estruturas de fundação e modelos matemáticos para sapatas têm sido investigados com sucesso em vários problemas de engenharia geotécnica. As principais contribuições de vários pesquisadores na última década são: “Comportamento de sapatas retangulares carregadas repetidamente em areia armada” (El Sawwaf e Nazir, 2010); “Vibração não linear de placas de compósito híbrido em fundações elásticas” (Chen et al., 2011); “Tabelas de projeto estocástico para capacidade de carga da sapata” (Shahin e Cheung, 2011); “Otimização de partículas modificadas para projeto ideal de suporte estendido e muro de contenção” (Khajehzadeh et al., 2011); “Projeto de sapatas retangulares em novo modelo” (Luévanos-Rojas et al., 2013); “Projeto de sapatas circulares isoladas em novo modelo” (Luévanos-Rojas, 2014a); “Projeto de sapatas retangulares combinadas com um limite usando um novo modelo” (Luévanos-Rojas, 2014b); “Determinação dos estados limites últimos de fundações de superfície usando a abordagem de programação de expressão gênica (GEP)” (Tahmasebi poor et al., 2015); “Projeto de sapatas combinadas de aresta trapezoidal em um novo modelo” (Luévanos-Rojas, 2015); “Novo método iterativo para calcular a tensão na base da sapata sob flexão biaxial” (Aydogdu, 2016); “Um estudo comparativo para o dimensionamento de sapatas retangulares e circulares isoladas usando novos modelos” (Luévanos-Rojas, 2016a); “Influência da rigidez das sapatas na resistência à punção” (Fillo et al., 2016); “Um novo modelo para o projeto de sapatas de divisa retangulares combinadas com dois lados opostos restritos” (Luévanos-Rojas, 2016b); “Projeto estrutural de sapatas de pilares isoladas” (Abdrabbo

et al., 2016); “Projeto ideal para sapatas retangulares isoladas usando pressão real do solo” (Luévanos-Rojas et al., 2017a); “Elementos finitos e análise experimental de sapatas de diferentes formatos na areia” (Anil et al., 2017); “Um estudo comparativo para o projeto de sapatas combinadas de formas trapezoidais e retangulares usando novos modelos” (Luévanos-Rojas et al., 2017b); “Desempenho de sapatas isoladas e dobradas” (El-kady e Badrawi, 2017); “Análise e projeto de vários tipos de sapatas isoladas” (Balachandar e Narendra Prasad, 2017); “Um novo modelo para sapatas combinadas em forma de T Parte II: Modelo matemático para design” (Luévanos-Rojas et al., 2018); “Resistência ao punçoamento de sapatas de concreto armado: avaliação do código de projeto” (Santos et al., 2018); “Efeito de fundações de solo na resposta à vibração de fundações de concreto usando um modelo matemático” (Dezhkam e Yaghfoori, 2018); “Análise de não linearidade no estudo de fundações de grades rasas” (Ibrahim et al., 2018); “Modelagem para sapatas combinadas Parte II: modelo matemático para projeto” (Yáñez-Palafox et al., 2019); “Método numérico para a análise e dimensionamento de sapatas quadradas isoladas sob carga concêntrica” (Magade e Ingle, 2019).

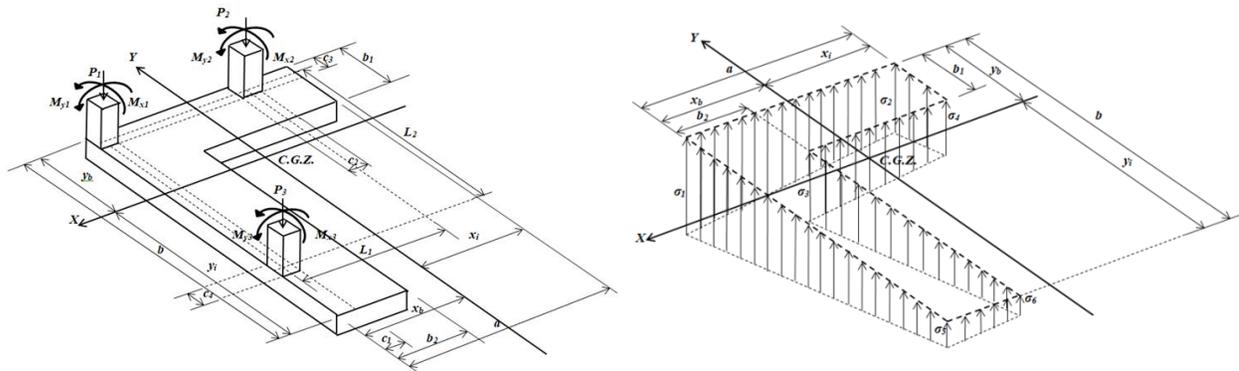
O documento relacionado a este trabalho é: "O dimensionamento ideal para sapatas de canto combinadas" para obter apenas a área mínima da superfície de contato no solo entre o solo e a sapata (López-Chavarría et al., 2017), mas este documento não apresenta o projeto de sapatas de canto combinadas (inclinação efetiva e aço de armadura).

Este documento mostra um modelo analítico para o projeto de sapatas de canto combinadas sujeitas a uma carga axial e dois momentos de flexão ortogonais para cada pilar, e a pressão do solo na sapata é apresentada como uma função dos efeitos gerados por cada pilar, e a metodologia é baseada no princípio de que a integração da força cortante é o momento. O projeto atual considera a pressão máxima em todos os pontos de contato, pois o centro de gravidade da sapata é forçado a coincidir com a posição da força resultante das cargas. Este modelo é verificado pelo equilíbrio das forças de cisalhamento e momentos. A principal vantagem do modelo proposto é apresentar o momento, o cisalhamento na flexão e a punção por meio de equações analíticas. Portanto, o modelo proposto será o mais adequado, pois gera um melhor controle de qualidade nos recursos utilizados (mão de obra, materiais, pequenos equipamentos, etc.), pois se ajusta às condições da real pressão do solo.

2. FORMULAÇÃO DO MODELO PROPOSTO

As seções críticas para sapatas de acordo com o código são (ACI 318S-14, 2014): 1) O momento está localizado na face do pilar; 2) A cortante de flexão está localizada a uma distância "d" da face do pilar; 3) O punçionamento ocorre a uma distância "d / 2" em ambas as direções.

A carga axial e dois momentos fletores ortogonais (flexão biaxial) de cada pilar aplicado na sapata de canto combinada são mostrados na Figura 2 (a). A pressão sob a sapata de canto combinada que varia linearmente, e a tensão em cada vértice da sapata é apresentada na Figura 2 (b).



(a) Cargas aplicadas sobre a sapata

(b) Pressão embaixo da sapata

Figura 2. Sapata combinada de canto

Os esforços na direção principal (eixos "X" e "Y") são obtidos:

$$\sigma(x, y) = \frac{R}{A} + \frac{M_{xT}y}{I_x} + \frac{M_{yT}x}{I_y} \quad (1)$$

onde: R, M_{xT} , M_{yT} , A, I_x , e I_y foram obtidas de (López-Chavarría et al., 2017).

Os esforços abaixo do pilar 2 (eixos "X₂" e "Y₂") se encontram (ver Figura 3):

$$\sigma_{P_2}(x, y) = \frac{P_2}{w_2 b_1} + \frac{12[M_{x2} + P_2(b_1 - c_3)/2]y}{w_2 b_1^3} + \frac{12M_{y2}x}{w_2^3 b_1} \quad (2)$$

Os esforços abaixo do pilar 3 (eixos "X₃" e "Y₃") são obtidos por (ver Figura 3):

$$\sigma_{P_3}(x, y) = \frac{P_3}{w_3 b_2} + \frac{12[M_{y3} + P_3(b_2 - c_1)/2]x}{w_3 b_2^3} + \frac{12M_{x3}y}{w_3^3 b_2} \quad (3)$$

onde: w_2 e w_3 são as larguras da superfície de análise nos pilares 2 e 3: $w_2 = c_2 + d$, $w_3 = c_4 + d$.

2.1 Cortantes por flexão e momentos flexionantes

As seções críticas para momentos fletores são apresentadas nos eixos: a'-a', b'-b', c'-c', d'-d', e'-e', f'-f', g'-g', h'-h', i'-i' e j'-j' (consulte a Figura 3). As seções críticas para cortantes de flexão são apresentadas nos eixos: k'-k', l'-l', m'-m', n'-n', o'-o', p'-p', q'-q' e r'-r' (consulte a Figura 4).

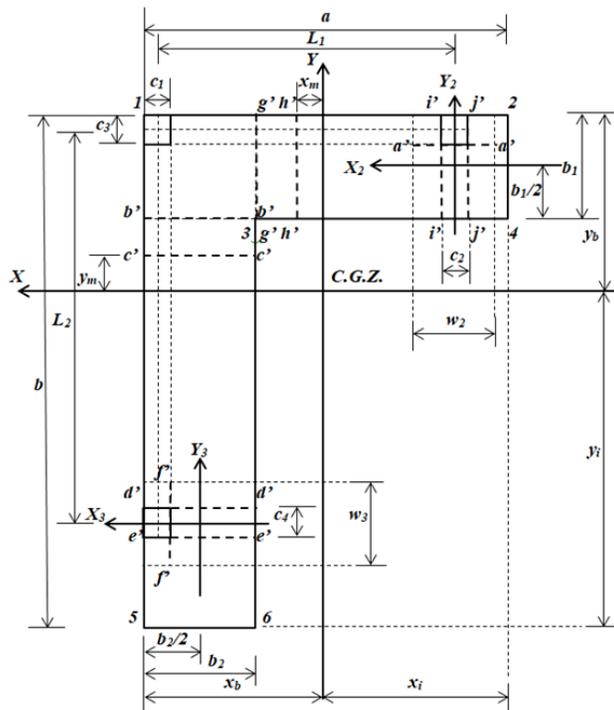


Figura 3. Seções críticas para momentos de flexão

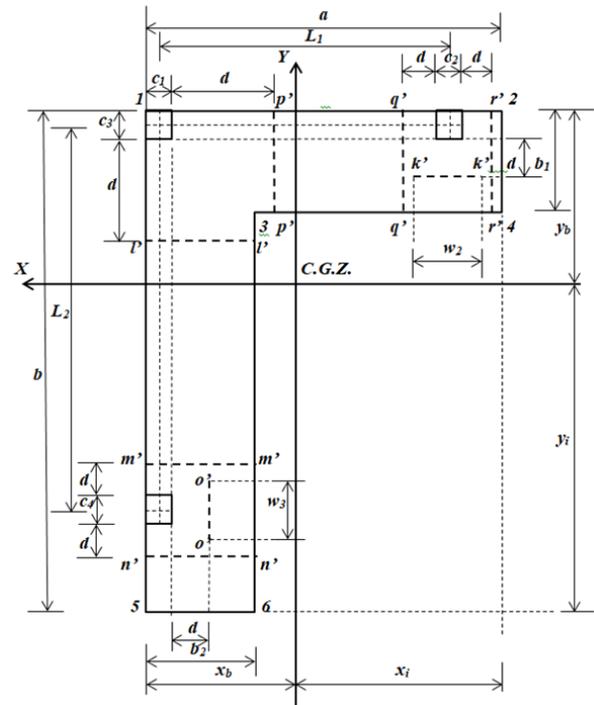


Figura 4. Seções críticas para cortantes por flexão

Nota: Quando os momentos em torno do eixo X são obtidos, os momentos em torno do eixo Y são considerados iguais a zero. Quando os momentos em torno do eixo Y são obtidos, os momentos em torno do eixo X não têm influência. Porque estes são eixos perpendiculares uns aos outros.

2.1.1 Cortantes de flexão e momentos em torno de um eixo paralelo ao eixo "X₂" de $-b_1/2 \leq y_2 \leq b_1/2 - c_3/2$

A cortante "V_{y₂}" é encontrada através do volume de pressão da área formada pelo eixo "X₂" com largura "w₂ = c₂ + d" e a extremidade livre (lado interno) da sapata:

$$V_{y_2} = - \int_{-b_1/2}^{y_2} \int_{-w_2/2}^{w_2/2} \sigma_{P_2}(x,y) dx dy$$

$$= - \frac{P_2 [12(b_1 - c_3)y_2^2 + 4b_1^2 y_2 - b_1^2(b_1 - 3c_3)]}{4b_1^3} - \frac{3M_{x_2}(4y_2^2 - b_1^2)}{2b_1^3} \quad (4)$$

Ao integrar a equação (4) em relação a "y₂", obtém-se:

$$M_{X_2} = - \frac{P_2 y_2 [4(b_1 - c_3)y_2^2 + 2b_1^2 y_2 - b_1^2(b_1 - 3c_3)]}{4b_1^3} - \frac{M_{x_2} y_2 (4y_2^2 - 3b_1^2)}{2b_1^3} + C_1 \quad (5)$$

onde: M_{X₂} é o momento ao redor do eixo "X₂" e V_{y₂} é a cortante a uma distância "y₂". Agora, substituindo "y₂ = -b₁/2" e "M_{X₂} = 0" na equação (5) e a constante "C₁" é:

$$C_1 = \frac{P_2(b_1 - 2c_3) + 4M_{x_2}}{8} \quad (6)$$

Substituindo a equação (6) na equação (5) e a equação do momento generalizado é apresentada a seguir:

$$M_{x_2} = - \frac{P_2 y_2 [4(b_1 - c_3)y_2^2 + 2b_1^2 y_2 - b_1^2(b_1 - 3c_3)]}{4b_1^3} - \frac{M_{x_2} y_2 (4y_2^2 - 3b_1^2)}{2b_1^3} + \frac{P_2(b_1 - 2c_3) + 4M_{x_2}}{8} \quad (7)$$

2.1.2 Cortantes por flexão e momentos sobre um eixo paralelo ao eixo "X" de $y_b - c_3/2 \leq y \leq y_b$

A cortante "V_y" é encontrada através do volume de pressão da área formada pelo eixo "X" com largura "a" e a extremidade livre (lado superior) da sapata:

$$V_y = - \int_y^{y_b} \int_{x_b-a}^{x_b} \sigma(x, y) dx dy = - \frac{Ra(y_b - y)}{A} - \frac{M_{xT} a (y_b^2 - y^2)}{2I_x} - \frac{M_{yT} a (2x_b - a)(y_b - y)}{2I_y} \quad (8)$$

Por integração da equação (8) com respeito a "y", obtemos:

$$M_x = - \frac{Ray_1(2y_b - y)}{2A} - \frac{M_{xT} a y_1(3y_b^2 - y^2)}{6I_x} + C_2 \quad (9)$$

onde: M_X é o momento em torno do eixo "X" e V_y é a cortante na distância "y". Agora, substituindo "y = y_b" e "M_X = 0" na equação (9) e a constante "C₂" é:

$$C_2 = \frac{Ray_b^2}{2A} + \frac{M_{xT} a y_b^3}{3I_x} \quad (10)$$

Substituindo a equação (10) na equação (9) e a equação do momento generalizado é apresentada como segue:

$$M_x = \frac{Ra(y_b - y)^2}{2A} + \frac{M_{xT} a (2y_b^3 - 3y_b^2 y + y^3)}{6I_x} \quad (11)$$

Substituindo "y = y_b - c₃/2" na equação (11) para obter o momento em torno do eixo localizado no centro do pilar 1 e 2 "M_{c₃/2}":

$$M_{c_3/2} = \frac{Rac_3^2}{8A} + \frac{M_{xT} ac_3^2(6y_b - c_3)}{48I_x} \quad (12)$$

2.1.3 Cortantes por flexão e momentos sobre um eixo paralelo ao eixo "X" de $y_b - b_1 \leq y \leq y_b - c_3/2$

A cortante "V_y" é encontrada através do volume de pressão da área formada pelo eixo "X" com largura "a" e parte superior da sapata:

$$\begin{aligned}
 V_y &= P_1 + P_2 - \int_y^{y_b} \int_{x_b-a}^{x_b} \sigma(x,y) dx dy \\
 &= P_1 + P_2 - \frac{Ra(y_b - y)}{A} - \frac{M_{xT}a(y_b^2 - y^2)}{2I_x} - \frac{M_{yT}a(2x_b - a)(y_b - y)}{2I_y}
 \end{aligned} \tag{13}$$

Ao integrar a equação (13) com respeito a "y", obtemos:

$$M_x = (P_1 + P_2)y - \frac{Ray_1(2y_b - y)}{2A} - \frac{M_{xT}ay_1(3y_b^2 - y^2)}{6I_x} + C_3 \tag{14}$$

Agora, substituindo "y = y_b - c₃/2" e "M_x = M_{c₃/2} - M_{x1} - M_{x2}" na equação (14) e a constante "C₃" é:

$$C_3 = \frac{Ray_b^2}{2A} + \frac{M_{xT}ay_b^3}{3I_x} - (P_1 + P_2)\left(y_b - \frac{c_3}{2}\right) - M_{x1} - M_{x2} \tag{15}$$

Substituindo a equação (15) na equação (14) e a equação do momento generalizado é apresentada como segue:

$$M_x = \frac{Ra(y_b - y)^2}{2A} + \frac{M_{xT}a(2y_b^3 - 3y_b^2y + y^3)}{6I_x} - (P_1 + P_2)\left(y_b - y - \frac{c_3}{2}\right) - M_{x1} - M_{x2} \tag{16}$$

Substituindo "y = y_b - b₁" na equação (16) para obter o momento ao redor do eixo b'-b' "M_{b1}":

$$M_{b_1} = \frac{Rab_1^2}{2A} + \frac{M_{xT}ab_1^2(3y_b - b_1)}{6I_x} - (P_1 + P_2)\left(b_1 - \frac{c_3}{2}\right) - M_{x1} - M_{x2} \tag{17}$$

2.1.4 Cortantes por flexão e momentos sobre um eixo paralelo ao eixo "X" de y_b - L₂ - c₃/2 ≤ y ≤ y_b - b₁

A cortante "V_y" é encontrada através do volume de pressão da área formada pelo eixo "X" e a parte superior da sapata:

$$\begin{aligned}
 V_y &= P_1 + P_2 - \int_{y_b-b_1}^{y_b} \int_{x_b-a}^{x_b} \sigma(x,y) dx dy - \int_y^{y_b-b_1} \int_{x_b-b_2}^{x_b} \sigma(x,y) dx dy \\
 &= P_1 + P_2 - \frac{R[ab_1 + b_2(y_b - y - b_1)]}{A} \\
 &\quad - \frac{M_{xT}\{ab_1(2y_b - b_1) + b_2[(y_b - b_1)^2 - y^2]\}}{2I_x} \\
 &\quad - \frac{M_{yT}[ab_1(2x_b - a) + b_2(2x_b - b_2)(y_b - y - b_1)]}{2I_y}
 \end{aligned} \tag{18}$$

Ao integrar a equação (18) com respeito a "y", obtemos:

$$M_X = (P_1 + P_2)y - \frac{Ry[2ab_1 + b_2(2y_b - y - 2b_1)]}{2A} - \frac{M_{xT}y\{3ab_1(2y_b - b_1) + b_2[3(y_b - b_1)^2 - y^2]\}}{6I_x} + C_4 \quad (19)$$

Agora, substituindo “ $y = y_b - b_1$ ” e “ $M_X = M_{b1}$ ” na equação (19) e a constante “ C_4 ” é:

$$C_4 = \frac{R[ab_1(2y_b - b_1) + b_2(y_b - b_1)^2]}{2A} + \frac{M_{xT}[ab_1(3y_b^2 - 3y_b b_1 + b_1^2) + b_2(y_b - b_1)^3]}{3I_x} - (P_1 + P_2)\left(y_b - \frac{c_3}{2}\right) - M_{x1} - M_{x2} \quad (20)$$

Substituindo a equação (20) na equação (19) e a equação de momentos generalizados se apresenta como segue:

$$M_X = \frac{R[ab_1(2y_b - 2y - b_1) + b_2(y_b - y - b_1)^2]}{2A} - \frac{(P_1 + P_2)(2y_b - 2y - c_3)}{2} + \frac{M_{xT}ab_1[2(3y_b^2 - 3y_b b_1 + b_1^2) - 3y(2y_b - b_1)]}{6I_x} + \frac{M_{xT}b_2[y^3 + (y_b - b_1)^2(2y_b - 3y - 2b_1)]}{6I_x} - M_{x1} - M_{x2} \quad (21)$$

Substituindo “ $y = y_b - L_2 - c_3/2$ ” na equação (21) para obter o momento ao redor do eixo localizado no centro do pilar 3 “ M_{L2} ”:

$$M_{L_2} = \frac{R[ab_1(2L_2 + c_3 - b_1) + b_2(L_2 + c_3/2 - b_1)^2]}{2A} - (P_1 + P_2)L_2 + \frac{M_{xT}ab_1^2(3y_b - b_1)}{6I_x} + \frac{M_{xT}b_2[(y_b - L_2 - c_3/2)^3 - (y_b - b_1)^3]}{6I_x} + \frac{M_{xT}\{3[ay_b^2 - (a - b_2)(y_b - b_1)^2](L_2 + c_3/2 - b_1)\}}{6I_x} - M_{x1} - M_{x2} \quad (22)$$

2.1.5 Cortantes por flexão e momentos sobre um eixo paralelo ao eixo “X” de $y_b - b \leq y \leq y_b - L_2 - c_3/2$

A cortante “ V_y ” pode ser encontrada através do volume de pressão da área formada pelo eixo “X” e a parte de cima da sapata:

$$V_y = P_1 + P_2 + P_3 - \int_{y_b - b_1}^{y_b} \int_{x_b - a}^{x_b} \sigma(x, y) dx dy - \int_y^{y_b - b_1} \int_{x_b - b_2}^{x_b} \sigma(x, y) dx dy = R - \frac{M_{yT}[ab_1(2x_b - a) + b_2(2x_b - b_2)(y_b - y - b_1)]}{2I_y} - \frac{R[ab_1 + b_2(y_b - y - b_1)]}{A} - \frac{M_{xT}\{ab_1(2y_b - b_1) + b_2[(y_b - b_1)^2 - y^2]\}}{2I_x} \quad (23)$$

Pela integração da equação (23), obtém-se:

$$M_X = R y - \frac{R[2ab_1 + b_2(2y_b - y - 2b_1)]y}{2A} - \frac{M_{xT}[3ab_1(2y_b - b_1) + b_2[3(y_b - b_1)^2 - y^2]]y}{6I_x} + C_5 \quad (24)$$

Agora, substituindo “ $y = y_b - L_2 - c_3/2$ ” e “ $M_X = M_{L2} - M_{x3}$ ” e a constante “ C_5 ” é:

$$C_5 = \frac{R[ab_1(2y_b - b_1) + b_2(y_b - b_1)^2]}{2A} + \frac{M_{xT}[ay_b^3 - (a - b_2)(y_b - b_1)^3]}{3I_x} + P_3L_2 - \frac{R(2y_b - c_3)}{2} - M_{x1} - M_{x2} - M_{x3} \quad (25)$$

Substituindo a equação (25) na equação (24) e a equação dos momentos fletores generalizados é apresentada a seguir:

$$M_X = P_3L_2 - \frac{R[b_2y(2y_b - y - 2b_1) - ab_1(2y_b - 2y - b_1) - b_2(y_b - b_1)^2]}{2A} - R\left(y_b - y - \frac{c_3}{2}\right) + \frac{M_{xT}[ay_b^3 - (a - b_2)(y_b - b_1)^3]}{3I_x} - \frac{M_{xT}\{3ab_1(2y_b - b_1) + b_2[3(y_b - b_1)^2 - y^2]\}y}{6I_x} - M_{x1} - M_{x2} - M_{x3} \quad (26)$$

Nas seções seguintes, para obter as equações da cortante e dos momentos generalizados, é utilizado o mesmo procedimento utilizado anteriormente. Portanto, as equações para as cortantes de flexão e momentos generalizados são mostradas abaixo.

2.1.6 Cortantes por flexão e momentos sobre um eixo paralelo ao eixo “ Y_3 ” de $-b_2/2 \leq x_3 \leq b_2/2 - c_1/2$

$$V_{x_3} = - \int_{-w_3/2}^{w_3/2} \int_{-b_2/2}^{x_3} \sigma_{P_3}(x, y) dx dy = - \frac{P_3[12(b_2 - c_1)x_3^2 + 4b_2^2x_3 - b_2^2(b_2 - 3c_1)]}{4b_2^3} - \frac{3M_{y3}(4x_3^2 - b_2^2)}{2b_2^3} \quad (27)$$

$$M_{Y_3} = - \frac{P_3x_3[4(b_2 - c_1)x_3^2 + 2b_2^2x_3 - b_2^2(b_2 - 3c_1)]}{4b_2^3} - \frac{M_{y3}x_3(4x_3^2 - 3b_2^2)}{2b_2^3} + \frac{P_3(b_2 - 2c_1) + 4M_{y3}}{8} \quad (28)$$

2.1.7 Cortantes por flexão e momentos sobre um eixo paralelo ao eixo “ Y ” de $x_b - c_1/2 \leq x \leq x_b$

$$V_x = - \int_{y_b - b}^{y_b} \int_x^{x_b} \sigma(x, y) dx dy = - \frac{Rb(x_b - x)}{A} - \frac{M_{xT}b(2y_b - b)(x_b - x)}{2I_x} - \frac{M_{yT}b(x_b^2 - x^2)}{2I_y} \quad (29)$$

$$M_Y = \frac{Rb(x_b - x)^2}{2A} + \frac{M_{yT}b(2x_b^3 - 3x_b^2x + x^3)}{6I_y} \quad (30)$$

2.1.8 Cortantes por flexão e momentos sobre um eixo paralelo ao eixo “Y” de $x_b - b_2 \leq x \leq x_b - c_1/2$

$$\begin{aligned} V_x &= P_1 + P_3 - \int_{y_b-b}^{y_b} \int_x^{x_b} \sigma(x,y) dx dy \\ &= P_1 + P_3 - \frac{Rb(x_b - x)}{A} - \frac{M_{xT}b(2y_b - b)(x_b - x)}{2I_x} - \frac{M_{yT}b(x_b^2 - x^2)}{2I_y} \end{aligned} \quad (31)$$

$$M_Y = \frac{Rb(x_b - x)^2}{2A} + \frac{M_{yT}b(2x_b^3 - 3x_b^2x + x^3)}{6I_y} - (P_1 + P_3) \left(x_b - x - \frac{c_1}{2} \right) - M_{y1} - M_{y3} \quad (32)$$

2.1.9 Cortantes por flexão e momentos sobre um eixo paralelo ao eixo “Y” de $x_b - L_1 - c_1/2 \leq x \leq x_b - b_2$

$$\begin{aligned} V_x &= P_1 + P_3 - \int_{y_b-b}^{y_b} \int_{x_b-b_2}^{x_b} \sigma(x,y) dx dy - \int_{y_b-b_1}^{y_b} \int_x^{x_b-b_2} \sigma(x,y) dx dy \\ &= P_1 + P_3 - \frac{R[bb_2 + b_1(x_b - x - b_2)]}{A} \\ &\quad - \frac{M_{xT}[bb_2(2y_b - b) + b_1(2y_b - b_1)(x_b - x - b_2)]}{2I_x} \\ &\quad - \frac{M_{yT}\{bb_2(2x_b - b_2) + b_1[(x_b - b_2)^2 - x^2]\}}{2I_y} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} M_Y &= \frac{R[bb_2(2x_b - 2x - b_2) + b_1(x_b - x - b_2)^2]}{2A} - \frac{(P_1 + P_3)(2x_b - 2x - c_1)}{2} \\ &\quad + \frac{M_{yT}bb_2[2(3x_b^2 - 3x_b b_2 + b_2^2) - 3x(2x_b - b_2)]}{6I_y} \\ &\quad + \frac{M_{yT}b_1[x^3 + (x_b - b_2)^2(2x_b - 3x - 2b_2)]}{6I_y} - M_{y1} - M_{y3} \end{aligned} \quad (34)$$

2.1.10 Cortantes por flexão e momentos sobre um eixo paralelo ao eixo “Y” de $x_b - a \leq x \leq x_b - L_1 - c_1/2$

$$\begin{aligned} V_x &= P_1 + P_2 + P_3 - \int_{y_b-b}^{y_b} \int_{x_b-b_2}^{x_b} \sigma(x,y) dx dy - \int_{y_b-b_1}^{y_b} \int_x^{x_b-b_2} \sigma(x,y) dx dy \\ &= R - \frac{M_{xT}[bb_2(2y_b - b) + b_1(2y_b - b_1)(x_b - x - b_2)]}{2I_x} \\ &\quad - \frac{M_{yT}\{bb_2(2x_b - b_2) + b_1[(x_b - b_2)^2 - x^2]\}}{2I_y} - \frac{R[bb_2 + b_1(x_b - x - b_2)]}{A} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
 M_Y = P_2 L_1 - & \frac{R[b_1 x(2x_b - x - 2b_2) - bb_2(2x_b - 2x - b_2) - b_1(x_b - b_2)^2]}{A} \\
 & - R\left(x_b - x - \frac{c_1}{2}\right) + \frac{M_{yT}[bx_b^3 - (b - b_1)(x_b - b_2)^3]}{3I_y} \\
 & - \frac{M_{yT}\{3bb_2(2x_b - b_2) + b_1[3(x_b - b_2)^2 - x^2]\}x}{6I_y} - M_{y1} - M_{y2} - M_{y3}
 \end{aligned} \quad (36)$$

2.2 Cortantes por punção

As seções críticas para cortantes de punção são mostradas na Figura 5.

2.2.1 Cortantes por punção para o pilar de canto (pilar 1)

A seção crítica para o pilar 1 é apresentada no perímetro formado pelos pontos 1, 7, 8 e 9 da sapata (ver Figura 5). A cortante de punção é obtida pela carga axial do pilar 1 menos o volume de pressão da área delimitada pelos pontos 1, 7, 8 e 9:

$$\begin{aligned}
 V_{p1} = P_1 - & \int_{y_b - c_3 - d/2}^{y_b} \int_{x_b - c_1 - d/2}^{x_b} \sigma(x, y) dx dy \\
 = P_1 - & \frac{M_{xT}(2y_b - c_3 - d/2)(c_1 + d/2)(c_3 + d/2)}{2I_x} \\
 & - \frac{M_{yT}(2x_b - c_1 - d/2)(c_1 + d/2)(c_3 + d/2)}{2I_y} - \frac{R(c_1 + d/2)(c_3 + d/2)}{A}
 \end{aligned} \quad (37)$$

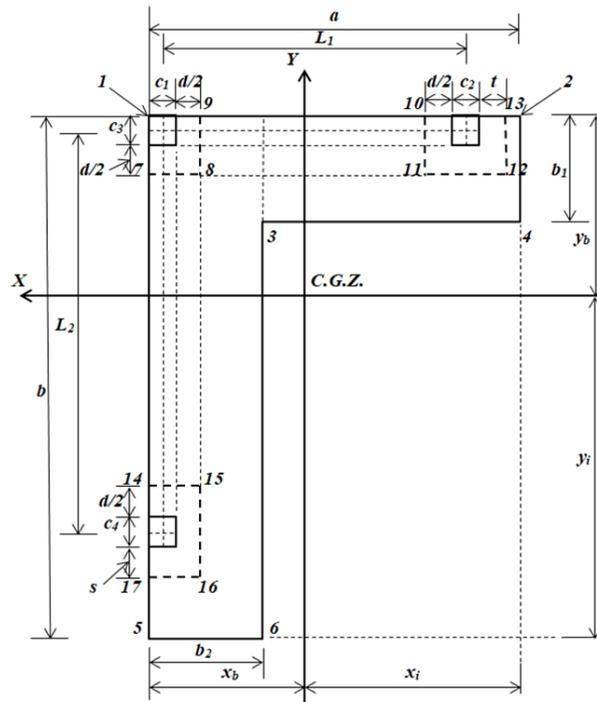


Figura 5. Seções críticas para cortante de punção

2.2.2 Cortantes por punção para o pilar limite (pilar 2)

A seção crítica para o pilar 2 é apresentada no perímetro formado pelos pontos 10, 11, 12 e 13 da sapata (ver Figura 5). A cortante de punção é obtida pela carga axial do pilar 2 menos o volume de pressão da área delimitada pelos pontos 10, 11, 12 e 13:

$$\begin{aligned}
 V_{p2} &= P_2 - \int_{y_b - c_3 - d/2}^{y_b} \int_{x_b - L_1 - (c_1 + c_2)/2 - t}^{x_b - L_1 - (c_1 - c_2)/2 + d/2} \sigma(x, y) dx dy \\
 &= P_2 - \frac{M_{yT}(c_2 + d/2 + t)(c_3 + d/2)(2x_b - 2L_1 - c_1 + d/2 - t)}{2I_y} \\
 &\quad - \frac{M_{xT}(c_2 + d/2 + t)(c_3 + d/2)(2y_b - c_3 - d/2)}{2I_x} \\
 &\quad - \frac{R(c_2 + d/2 + t)(c_3 + d/2)}{A}
 \end{aligned} \tag{38}$$

Nota: quando $d/2 \leq a - L_1 - (c_1 + c_2)/2 \rightarrow t = d/2$, e quando $d/2 > a - L_1 - (c_1 + c_2)/2 \rightarrow t = a - L_1 - (c_1 + c_2)/2$.

2.2.3 Cortantes por punção para o pilar limite (pilar 3)

A seção crítica para o pilar 3 é apresentada no perímetro formado pelos pontos pontos 14, 15, 16 e 17 da sapata (ver Figura 5). A cortante de punção é obtida pela carga axial do pilar 3 menos o volume de pressão da área delimitada pelos pontos 14, 15, 16 e 17:

$$\begin{aligned}
 V_{p3} &= P_3 - \int_{y_b - L_2 - (c_3 + c_4)/2 - s}^{y_b - L_2 - (c_3 - c_4)/2 + d/2} \int_{x_b - c_1 - d/2}^{x_b} \sigma(x, y) dx dy \\
 &= P_3 - \frac{M_{xT}(c_4 + d/2 + s)(c_1 + d/2)(2y_b - 2L_2 - c_3 + d/2 - s)}{2I_x} \\
 &\quad - \frac{M_{yT}(c_4 + d/2 + s)(c_1 + d/2)(2x_b - c_1 - d/2)}{2I_y} \\
 &\quad - \frac{R(c_4 + d/2 + s)(c_1 + d/2)}{A}
 \end{aligned} \tag{39}$$

Nota: quando $d/2 \leq b - L_2 - (c_3 + c_4)/2 \rightarrow s = d/2$, e quando $d/2 > b - L_2 - (c_3 + c_4)/2 \rightarrow t = b - L_2 - (c_3 + c_4)/2$.

3. VERIFICAÇÃO DO MODELO PROPOSTO

O modelo proposto neste documento é verificado da seguinte forma:

1.- Para os momentos fletores nos eixos X_2 e X : Quando “ $y_2 = - b_1 / 2$ ” é substituído na equação (7), $M_{X2} = 0$ é obtido, se “ $y = y_b$ ” é substituído na equação (11) obtemos $M_X = 0$ e, substituindo “ $y = y_b - b$ ” na equação (26), obtemos $M_X = 0$. Portanto, as equações para os momentos fletores sobre os eixos X_2 e X obedecem ao equilíbrio.

2.- Para os momentos fletores nos eixos Y_3 e Y : Quando “ $x_3 = - b_2 / 2$ ” é substituído na equação (28), $M_{Y3} = 0$ é obtido, se “ $x = x_b$ ” é substituído na equação (30) $M_Y = 0$ é obtido, e substituindo “ $x = x_b - a$ ” na equação (36), $M_Y = 0$. Portanto, as equações para os momentos fletores nos eixos Y_3 e Y obedecem ao equilíbrio.

3.- Para cortantes de flexão nos eixos X_2 e X : Quando “ $y_2 = - b_1 / 2$ ” é substituído na equação (4), $V_{y2} = 0$ é obtido, se “ $y = y_b$ ” é substituído na equação (8) obtemos $V_y = 0$, e substituindo “ $y = y_b - b$ ” na equação (23) obtemos $V_y = 0$. Portanto, as equações para as cortantes de flexão nos eixos X_2 e X obedecem ao equilíbrio.

4.- Para os momentos fletores nos eixos Y_3 e Y : Quando “ $x_3 = -b_2 / 2$ ” é substituído na equação (27), $V_{x3} = 0$ é obtido, se “ $x = x_b$ ” é substituído na equação (29) obtemos $V_x = 0$ e substituindo “ $x = x_b - a$ ” na equação (35), obtemos $V_x = 0$. Portanto, as equações para as cortantes de flexão nos eixos Y_3 e Y estão de acordo com o equilíbrio.

4. APLICAÇÃO DO MODELO PROPOSTO

O projeto de uma combinação de sapata de canto que suporta três pilares quadrados é mostrado abaixo com as seguintes informações: Os três pilares são de 40x40 cm, $L_1 = 5.00$ m, $L_2 = 5.00$ m, H (profundidade da sapata) = 2.0 m, $P_{D1} = 300$ kN, $P_{L1} = 200$ kN, $M_{Dx1} = 80$ kN-m, $M_{Lx1} = 70$ kN-m, $M_{Dy1} = 120$ kN-m, $M_{Ly1} = 80$ kN-m, $P_{D2} = 600$ kN, $P_{L2} = 400$ kN, $M_{Dx2} = 160$ kN-m, $M_{Lx2} = 140$ kN-m, $M_{Dy2} = 120$ kN-m, $M_{Ly2} = 80$ kN-m, $P_{D3} = 500$ kN, $P_{L3} = 400$ kN, $M_{Dx3} = 120$ kN-m, $M_{Lx3} = 80$ kN-m, $M_{Dy3} = 150$ kN-m, $M_{Ly3} = 100$ kN-m, $f'_c = 28$ MPa, $f_y = 420$ MPa, $q_a = 252$ kN/m², γ_c (densidade do concreto) = 24 kN/m³, γ_s (densidade de preenchimento do solo) = 15 kN/m³.

As cargas e momentos atuando na sapata de canto combinada são: $P_1 = 500$ kN-m, $M_{x1} = 150$ kN-m, $M_{y1} = 200$ kN-m, $P_2 = 1000$ kN, $M_{x2} = 300$ kN-m, $M_{y2} = 200$ kN-m, $P_3 = 900$ kN, $M_{x3} = 200$ kN-m, $M_{y3} = 250$ kN-m.

A capacidade de suporte disponível do solo é considerada $\sigma_{m\acute{a}x} = 213.00$ kN/m², devido à capacidade de carga do solo “ q_a ” o próprio peso da sapata é subtraído (γ_c pela espessura da sapata), e o peso próprio do preenchimento do solo (γ_s pela espessura do preenchimento).

Substituindo “ $\sigma_{m\acute{a}x}$, L_1 , L_2 , P_1 , M_{x1} , M_{y1} , P_2 , M_{x2} , M_{y2} , P_3 , M_{x3} , M_{y3} ” nas equações (30) a (42) do trabalho (López-Chavarría et al. 2017), e a solução por software MAPLE-15 se obtém: $A_{min} = 11.31$ m², $M_{xT} = -8.65$ kN-m, $M_{yT} = 9.49$ kN-m, $R = 2400$ kN, $a = 6.36$ m, $b = 5.95$ m, $b_1 = 1.00$ m, $b_2 = 1.00$ m, $\sigma_1 = 211.31$ kN/m², $\sigma_2 = 212.75$ kN/m², $\sigma_3 = 211.78$ kN/m², $\sigma_4 = 213.00$ kN/m², $\sigma_5 = 212.77$ kN/m², $\sigma_6 = 213.00$ kN/m².

As dimensões práticas da sapata combinada de canto que suporta três pilares quadrados são: $a = 6.40$ m, $b = 6.00$ m, $b_1 = 1.00$ m, $b_2 = 1.00$ m. Agora, as dimensões práticas para verificar as tensões são substituídas no mesmo software MAPLE-15, e a solução é: $A_{min} = 11.40$ m², $M_{xT} = 27.89$ kN-m, $M_{yT} = 7.89$ kN-m, $R = 2400$ kN, $a = 6.40$ m, $b = 6.00$ m, $b_1 = 1.00$ m, $b_2 = 1.00$ m, $\sigma_1 = 212.30$ kN/m², $\sigma_2 = 211.11$ kN/m², $\sigma_3 = 211.34$ kN/m², $\sigma_4 = 210.34$ kN/m², $\sigma_5 = 207.68$ kN/m², $\sigma_6 = 207.49$ kN/m².

As propriedades geométricas da sapata são: $x_b = 2.02$ m, $y_b = 1.82$ m, $I_x = 36.21$ m⁴, $I_y = 42.73$ m⁴. As cargas fatoradas e os momentos que atuam na sapata são: $P_{u1} = 680$ kN, $M_{ux1} = 208$ kN-m, $M_{uy1} = 272$ kN-m, $P_{u2} = 1360$ kN, $M_{ux2} = 416$ kN-m, $M_{uy2} = 272$ kN-m, $P_{u3} = 1240$ kN, $M_{ux3} = 272$ kN-m, $M_{uy3} = 340$ kN-m. As cargas e momentos resultantes fatorados pelas equações (31) a (33) (López-Chavarría et al., 2017) são obtidas: $R_u = 3280$ kN, $M_{uxT} = -4.21$ kN-m, $M_{uyT} = 39.79$ kN-m.

O momento sobre o eixo a'-a' pela equação (7) é obtido “ $M_{a'} = 289.15$ kN-m” em $y_2 = b_1/2 - c_3$. O momento sobre o eixo b'-b' pela equação (16) é obtido “ $M_{b'} = -1335.85$ kN-m” em $y = y_b - b_1$. Agora, substituindo os valores correspondentes na equação (21) e diferenciando com relação a “ y ”, isso é igual a zero para obter a localização do momento máximo “ $y_m = 0.12$ m”, posteriormente se substitui na equação (21), e o momento é “ $M_{c'} = -1405.08$ kN-m”. O momento sobre o eixo d'-d' pela equação (21) é obtido “ $M_{d'} = 168.08$ kN-m” em $y = y_b - L_2 - c_3/2 + c_4/2$. O momento sobre o eixo e'-e' pela equação (26) é obtido “ $M_{e'} = 51.87$ kN-m” em $y = y_b - L_2 - c_3/2 - c_4/2$.

O momento sobre o eixo f'-f' pela equação (28) é obtido “ $M_{f'} = 238.18$ kN-m” em $x_3 = b_2/2 - c_1$. O momento sobre o eixo g'-g' pela equação (32) é obtido “ $M_{g'} = -1280.14$ kN-m” em $x = x_b - b_2$. Agora, substituindo os valores correspondentes na equação (34) e diferenciando com relação a “ x ”, isso é igual a zero para obter a localização do momento máximo “ $x_m = 0.37$ m”, posteriormente se

substituí na equação (34), e o momento é “ $M_h = -1339.60 \text{ kN-m}$ ”. O momento sobre o eixo $i'-i'$ pela equação (34) é obtido “ $M_i = 278.39 \text{ kN-m}$ ” em $x = x_b - L_1 - c_1/2 + c_2/2$. O momento sobre o eixo $j'-j'$ pela equação (36) é obtido “ $M_j = 141.97 \text{ kN-m}$ ” em $x = x_b - L_1 - c_1/2 - c_2/2$. A escala efetiva no pilar 2 é: 18.33 cm. A escala efetiva para o momento máximo “ M_c ” é: 46.42 cm. A escala efetiva no pilar 3 é: 16.63 cm. A escala efetiva para o momento máximo “ M_h ” é 45.32 cm. A escala efetiva depois de fazer várias propostas é: $d = 92.00 \text{ cm}$, $r = 8.00 \text{ cm}$ e $t = 100 \text{ cm}$.

A Tabela 1 mostra as cortantes de flexão que atuam na sapata e aquelas resistidas pelo concreto de acordo com a norma (ACI 318S-14).

Tabela 1. Cortantes por flexão.

Eixos	Coordenadas	Largura de análise cm	Cortantes por flexão	
			Atuantes kN	Resistidos kN
k'	$y_2 = b_1/2 - c_3 - d$	132	0*	928.56
l'	$y = y_b - c_3 - d$	100	114.14	703.45
m'	$y = y_b - c_3/2 - L_2 + c_4/2 + d$	100	-684.15	703.45
n'	$y = y_b - c_3/2 - L_2 - c_4/2 - d$	100	0*	703.45
o'	$x_3 = b_2/2 - c_1 - d$	132	0*	928.56
p'	$x = x_b - c_1 - d$	100	92.11	703.45
q'	$x = x_b - c_1/2 - L_1 + c_2/2 + d$	100	-699.81	703.45
r'	$y = y_b - c_3/2 - L_2 - c_4/2 - d$	100	22.68	703.45

* O eixo está localizado fora da área da sapata.

A Tabela 2 mostra as cortantes de punção atuando na sapata e resistidas pelo concreto de acordo com a norma (ACI 318S-14).

Tabela 2. Cortantes por punção.

Pilar	Perímetro crítico	Cortantes por punção			
		Atuantes kN	Resistidos kN		
1	$b_0 = c_1 + c_3 + d$	466.23	3629.81	7500.95	2348.70
2	$b_0 = c_2 + 2c_3 + 2d$	1036.93	6415.49	13112.93	4151.20
3	$b_0 = 2c_1 + c_4 + 2d$	911.26	6415.49	13112.93	4151.20

A Tabela 3 mostra o aço de armadura para a sapata combinada de canto (ACI 318S-14).

Tabela 3. Aço da armadura da sapata.

Aço da armadura			Área cm ²
Direção do eixo “Y”	Armadura na parte superior com largura b_2	Armadura principal	42.10
		Armadura mínima	30.67
		Armadura proposta	45.63 (9Ø1")
	Armadura na parte superior com largura $a - b_2$	Armadura por temperatura	97.20
		Armadura proposta	99.75 (35Ø3/4")

	Armadura na parte inferior com largura b_2	Armadura principal	4.86
		Armadura mínima	30.67
		Armadura proposta	35.49 (7Ø1")
	Armadura debajo de la columna 2 com largura w_2	Armadura principal	8.37
		Armadura mínima	40.48
		Armadura proposta	42.75 (15Ø3/4")
	Armadura na parte inferior com largura $a - b_2 - w_2$	Armadura por temperatura	73.44
		Armadura proposta	74.10 (26Ø3/4")
	Direção do eixo "X"	Armadura na parte superior com largura b_1	Armadura principal
Armadura mínima			30.67
Armadura proposta			40.56 (8Ø1")
Armadura na parte superior com largura $b - b_1$		Armadura por temperatura	90.00
		Armadura proposta	91.20 (32Ø3/4")
Armadura na parte inferior com largura b_1		Armadura principal	8.07
		Armadura mínima	30.67
		Armadura proposta	35.49 (7Ø1")
Armadura debajo de la columna 3 com largura w_3		Armadura principal	6.88
		Armadura mínima	40.48
		Armadura proposta	42.75 (15Ø3/4")
Armadura na parte inferior com largura $b - b_1 - w_3$		Armadura por temperatura	66.24
		Armadura proposta	68.40 (24Ø3/4")

Os efeitos que governam a espessura da sapata são os momentos de flexão, as cortantes de flexão e as cortantes de punção, e o aço da armadura é projetado por momentos. Para a espessura do exemplo numérico, o cisalhamento de flexão no eixo $q-q'$ governa (consulte a Tabela 1).

A Tabela 4 mostra o comprimento mínimo de desenvolvimento para barras deformadas " l_d " e o comprimento disponível " l_a ". Portanto, o comprimento disponível é maior do que o comprimento mínimo de desenvolvimento em ambas as direções (superior e inferior) (consulte a Tabela 4). Portanto, não são necessários ganchos para a sapata combinada de canto.

Tabela 4. Comprimento mínimo de desenvolvimento e comprimento disponível.

Localização da armadura	ψ_t	$\psi_e = \lambda$	Comprimento de desenvolvimento cm	Comprimento disponível	
				Direção do eixo "X" cm	Direção do eixo "Y" cm
Parte superior	1.3	1.0	154.17	165	170
Parte inferior	1.0	1.0	96.00	140	100

A Figura 6 mostra o aço da armadura e as dimensões da sapata de canto combinada em detalhes.

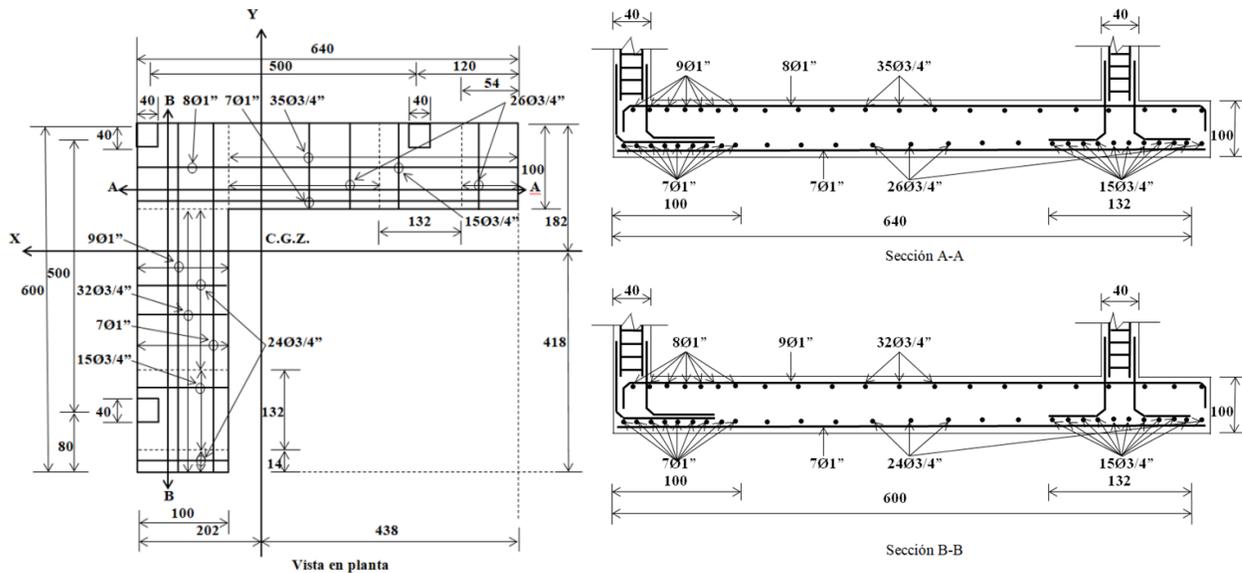


Figura 6. Projeto final da sapata combinada de canto

5. CONCLUSÕES

O novo modelo apresentado neste trabalho é aplicado apenas para o projeto de sapatas de canto combinadas. As considerações deste trabalho são: o membro estrutural é rígido e o solo que sustenta a sapata é elástico e homogêneo, o que obedece à equação de flexão biaxial, ou seja, a pressão varia linearmente.

O novo modelo apresentado neste documento conclui o seguinte:

- 1.- A espessura das sapatas angulares combinadas é determinada pela resistência à flexão e as sapatas isoladas são determinadas pela resistência à punção.
- 2.- O novo modelo não é limitado, enquanto o projeto atual considera que a pressão máxima em todos os pontos de contato, ou seja, a força resultante das cargas aplicadas coincide com a posição do centro geométrico da sapata.
- 3.- O novo modelo está mais ajustado às condições reais em relação ao desenho atual, pois o novo modelo leva em consideração a pressão linear do terreno e o desenho atual considera a pressão uniforme sobre toda a superfície de contato e esta é a pressão máxima.
- 4.- O novo modelo para o dimensionamento de sapatas de canto combinadas sujeitas a carregamento axial e dois momentos em direções ortogonais devido a cada pilar considera duas linhas de propriedade restritas, mas pode ser aplicado a três linhas de propriedade.

O novo modelo mostrado neste trabalho em termos de cargas aplicadas em cada pilar pode ser aplicado a: 1) Carga sem momentos, 2) Carga e um momento (flexão uniaxial), 3) Carga e dois momentos ortogonais (flexão biaxial).

Portanto, o modelo proposto é o mais adequado, pois gera um melhor controle de qualidade dos recursos utilizados.

As seguintes investigações podem ainda ser implementadas: 1) Uma continuação deste trabalho seria formular o custo mínimo para as sapatas de canto combinadas; 2) Quando as sapatas de canto combinadas suportam mais de dois pilares em cada direção; 3) O modelo proposto pode ser estendido para o projeto de lajes de fundação; 4) Quando a sapata é movida sobre outro tipo de solo, por exemplo em solos totalmente argilosos (solos coesos) ou em solos totalmente arenosos (solos granulares), o diagrama de pressão é diferente do linear e o diagrama pode ser parabólico (ver Figura 1).

6. REFERÊNCIAS

- Abdrabbo, F., Mahmoud, Z. I. and Ebrahim, M. (2016), *Structural design of isolated column footings*. Alexandria Engineering Journal. 55(3):2665-2678. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2016.06.016>
- ACI 318S-14 (2014), “*Building Code Requirements for Structural Concrete and Commentary*, Committee 318”, New York, USA.
- Anil, Ö, Akbaş, S.O., Babagİray, S., Gel, A.C. and Durucan, C. (2017), *Experimental and finite element analyses of footings of varying shapes on sand*. Geomechanics and Engineering. 12(2):223-238. <https://doi.org/10.12989/gae.2017.12.2.223>
- Aydogdu, I. (2016), *New Iterative method to Calculate Base Stress of Footings under Biaxial Bending*. International Journal of Engineering & Applied Sciences (IJEAS). 8(4):40-48. <https://doi.org/10.24107/ijeas.281460>
- Balachandar, S. and Narendra Prasad, D. (2017), *Analysis and Design of Various Types of Isolated Footings*. International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology. 6(3):3980-3986. http://www.ijirset.com/upload/2017/march/173_balachandar%20pmu.pdf
- Bowles, J. E. (2001), “*Foundation analysis and design*”. McGraw-Hill, New York, USA.
- Chen, W-R., Chen, C-S and Yu, S-Y. (2011), *Nonlinear vibration of hybrid composite plates on elastic foundations*. Structural Engineering & Mechanics. 37(4):367-383. <https://doi.org/10.12989/sem.2011.37.4.367>
- Das, B.M., Sordo-Zabay, E., Arrijoja-Juarez, R. (2006), “*Principios de ingeniería de cimentaciones*”, Cengage Learning Latin América, Distrito Federal, México.
- Dezhkam, B. and Yaghfoori, A. (2018), *Soil foundation effect on the vibration response of concrete foundations using mathematical model*. Computers and Concrete. 22(2):221-225. <https://doi.org/10.12989/cac.2018.22.2.221>
- El-kady, M. S. and Badrawi, E. F. (2017), *Performance of isolated and folded footings*. Journal of Computational Design and Engineering. 4:150-157. <https://doi.org/10.1016/j.jcde.2016.09.001>
- Sawwaf, M. and Nazir, A. K. (2010), *Behavior of repeatedly loaded rectangular footings resting on reinforced sand*. Alexandria Engineering Journal. 49:349-356. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2010.07.002>
- Fillo, L., Augustin, T. and Knapcová, V. (2016), *Influence of footings stiffness on punching resistance*. Perspectives in Science. 7:204-207. <https://doi.org/10.1016/j.pisc.2015.11.034>
- Ibrahim, A., Dif, A. and Othman, W. (2018), *Nonlinearity analysis in studying shallow grid foundation*. Alexandria Engineering Journal. 57:859-866. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2016.11.021>
- Khajehzadeh, M., Taha, M. R., El-Shafie, A. and Eslami, M. (2011), *Modified particle swarm optimization for optimum design of spread footing and retaining wall*. Journal of Zhejiang University-SCIENCE A. 12(6):415-427. <https://link.springer.com/article/10.1631/jzus.A1000252>
- Kurian, N. P. (2005), “*Design of foundation systems*”, Alpha Science Int'l Ltd., New Delhi, India.
- López-Chavarría, S., Luévanos Rojas, A. and Medina Elizondo, M. (2017), *Optimal dimensioning for the corner combined footings*. Advances in Computational Design. 2(2):169-183. <https://doi.org/10.12989/acd.2017.2.2.169>
- Luévanos-Rojas, A., Faudoa-Herrera, J. G., Andrade-Vallejo, R. A. and Cano-Alvarez M. A. (2013), *Design of Isolated Footings of Rectangular Form Using a New Model*. International Journal of Innovative Computing, Information and Control. 9(10):4001-4022. <http://www.ijcic.org/ijcic-12-10031.pdf>

- Luévanos-Rojas, A. (2014a), *Design of isolated footings of circular form using a new model*. Structural Engineering and Mechanics. 52(4):767-786. <https://doi.org/10.12989/sem.2014.52.4.767>
- Luévanos-Rojas, A. (2014b), *Design of boundary combined footings of rectangular shape using a new model*. Dyna-Colombia. 81(188):199-208. <http://dx.doi.org/10.15446/dyna.v81n188.41800>
- Luévanos-Rojas, A. (2015), *Design of boundary combined footings of trapezoidal form using a new model*. Structural Engineering and Mechanics. 56(5):745-765. <https://doi.org/10.12989/sem.2015.56.5.745>
- Luévanos-Rojas, A. (2016a), *A comparative study for the design of rectangular and circular isolated footings using new models*. Dyna-Colombia. 83(196):149-158. <http://dx.doi.org/10.15446/dyna.v83n196.51056>
- Luévanos-Rojas, A. (2016b), *A new model for the design of rectangular combined boundary footings with two restricted opposite sides*. Revista ALCONPAT. 6(2):172-187. <https://doi.org/10.21041/ra.v6i2.137>
- Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S. and Medina-Elizondo, M. (2017a), *Optimal design for rectangular isolated footings using the real soil pressure*. Ingeniería e Investigación. 37(2):25-33. <http://dx.doi.org/10.15446/ing.investig.v37n2.61447>
- Luévanos-Rojas, A., Barquero-Cabrero, J. D., López-Chavarría, S. and Medina-Elizondo, M. (2017b), *A comparative study for design of boundary combined footings of trapezoidal and rectangular forms using new models*. Coupled Systems Mechanics. 6(4):417-437. <https://doi.org/10.12989/csm.2017.6.4.417>
- Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S. & Medina-Elizondo, M. (2018), *A new model for T-shaped combined footings Part II: Mathematical model for design*. Geomechanics and Engineering. 14(1):61-69. <https://doi.org/10.12989/gae.2018.14.1.061>
- Magade, S. B. and Ingle, R. K. (2019), *Numerical method for analysis and design of isolated square footing under concentric loading*. International Journal of Advanced Structural Engineering. 11:9-20. <https://doi.org/10.1007/s40091-018-0211-3>
- Punmia, B. C., Kumar-Jain, A., Kumar-Jain, A. (2007), “*Limit state design of reinforced concrete*”, Laxmi Publications (P) Limited, New Delhi, India.
- Santos, D. F. A., Lima Neto, A. F. and Ferreira, M. P. (2018), *Punching shear resistance of reinforced concrete footings: evaluation of design codes*. IBRACON Structures and Materials Journal. 11(2):432-454. <https://doi.org/10.1590/s1983-41952018000200011>
- Shahin M. A. and Cheung E. M. (2011), *Stochastic design charts for bearing capacity of strip footings*. Geomechanics and Engineering. 3(2):153-167. <http://hdl.handle.net/20.500.11937/6498>
- Tahmasebi poor, A., Barari, M., Behnia, M. and Najafi, T. (2015), *Determination of the ultimate limit states of shallow foundations using gene expression programming (GEP) approach*. Soils and Foundations. 55(3):650-659. <https://doi.org/10.1016/j.sandf.2015.04.015>
- Varghese, P. C. (2009), “*Design of reinforced concrete foundations*”, PHI Learning Pvt. Ltd., New Delhi, India.
- Yáñez-Palafox, J.A., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S. and Medina-Elizondo, M. (2019), *Modeling for the strap combined footings Part II: Mathematical model for design*. Steel and Composite Structures. 30(2):109-121. <https://doi.org/10.12989/scs.2019.30.2.109>